

Inégalité d'Ahlfors en dimension supérieure¹

Benoît Saleur²

Abstract

We prove an Ahlfors' like inequality for the holomorphic curves with boundary of a complex compact Kobayashi-hyperbolic manifold.

1 Introduction

L'inégalité d'Ahlfors (voir par exemple [6], [11]) contient sous une forme géométrique l'essentiel de la théorie de distribution des valeurs des fonctions analytiques. Dans le cas d'une surface d'arrivée sans bord, elle s'énonce ainsi :

Théorème 1. *Soit Σ_0 une surface de Riemann compacte munie d'une métrique hermitienne fixée. Alors il existe une constante $h > 0$ telle que pour toute surface de Riemann compacte à bord Σ et toute fonction $\Sigma \xrightarrow{f} \Sigma_0$ holomorphe à l'intérieur de Σ et lisse au bord, l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$\min(0, \chi(\Sigma)) \leq \chi(\Sigma_0)S + hL.$$

On a noté $S = \frac{\text{Aire}(f(\Sigma))}{\text{Aire}(\Sigma_0)}$ le nombre moyen de feuilletés au-dessus de Σ_0 , $L = \text{Longueur}(f(\partial\Sigma))$ la longueur du bord de $f(\Sigma)$, et $\chi(\Sigma_0)$, $\chi(\Sigma)$ les caractéristiques d'Euler-Poincaré des surfaces Σ_0 et Σ .

On se propose ici d'établir une inégalité de type Ahlfors pour les courbes holomorphes d'une variété complexe compacte hyperbolique au sens de Kobayashi, c'est à dire ne contenant pas de courbe entière. On fixera donc une variété complexe compacte hyperbolique X munie d'une forme hermitienne ω . Une inégalité isopérimétrique linéaire pour les disques holomorphes a déjà été établie par Julien Duval (voir [7]), à l'aide d'un lemme à la Brody. Elle est également une conséquence implicite d'un résultat établi par Bruce Kleiner dans son preprint "Hyperbolicity using minimal surfaces" (voir [9]). Le lemme de Brody a également permis à Jean-Pierre Demailly d'obtenir une inégalité de type Ahlfors pour les courbes holomorphes sans bord (voir [5]). L'inégalité ici démontrée combine ces deux résultats. La démonstration repose sur des estimations longueur-aire et sur le théorème de Gauss-Bonnet, et emprunte beaucoup aux méthodes utilisées par Bruce Kleiner (voir [9]).

Soient Σ une surface de Riemann compacte à bord, de caractéristique d'Euler-Poincaré χ , et $f : \Sigma \mapsto X$ une fonction holomorphe sur l'intérieur de Σ et lisse au bord (on parlera de courbe holomorphe à bord). On munit Σ de sa métrique de Poincaré h , de courbure -1 . La pseudo-métrique $g = f^*\omega$ est conforme à h : il existe sur Σ une fonction lisse Φ telle que : $g = \Phi^2 h$. De plus, par le lemme de Brody (voir [3]) il existe une constante $M \geq \sqrt{2}$ ne dépendant que de (X, ω) telle que $\Phi \leq \frac{M}{\sqrt{2}}$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. *L'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :*

$$\text{Aire}_\omega(f(\Sigma)) \leq -2\pi M^2 \min(0, \chi(\Sigma))$$

ou

$$\text{Aire}_\omega(f(\Sigma)) \leq 2e^{8M^2} \text{Longueur}_\omega(f(\partial\Sigma)).$$

Ce résultat peut s'interpréter comme une notion faible de courbure négative pour la métrique de Kobayashi.

¹Published in Mathematische Annalen :
<http://www.springerlink.com/content/u870536335x7468w/?p=f03b483c6abc415fa2f1f22220607a70&pi=0>
 The original publication is available at www.springerlink.com.

²Département de Mathématiques de la faculté des sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex.
 Adresse électronique : saleur@clipper.ens.fr
 Mots clefs : Hyperbolicité complexe, inégalité isopérimétrique, surface de Riemann.
 Clefs AMS : 30F45, 32Q45.

2 Démonstration du théorème

La démonstration s'inspire de la méthode utilisée par Fiala pour prouver l'inégalité isopérimétrique dite de Bol-Fiala (voir [8]).

Commençons par remarquer que la courbure de Gauss K_g de la pseudo-métrique $g = f^*\omega$, définie hors de l'ensemble critique de f , peut être supposée inférieure ou égale à 1 : en effet, $f(\Sigma)$ est alors localement une sous-variété complexe de X , et sa courbure est donc majorée par une constante (voir l'article de J. Lafontaine dans [2] pour plus de détails). Il suffit alors de normaliser ω pour obtenir $K_g \leq 1$.

Il sera nécessaire par la suite de disposer d'une vraie métrique : en posant $g_\varepsilon = (\Phi + \varepsilon)^2 h$, on obtient une famille de métriques très proches de g , dont la courbure vérifie : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{g_\varepsilon} \leq 1$. Il suffit alors de démontrer le théorème pour les g_ε et de passer à la limite. Par souci de clarté, nous supposons directement que g est une métrique.

Notons d la distance associée à la métrique g . Pour tout réel $t > 0$, posons :

$$\Sigma(t) = \{p \in \Sigma \mid d(p, \partial\Sigma) \geq t\}.$$

Les frontières $\partial\Sigma(t)$ de ces domaines sont appelées "courbes parallèles" au bord $\partial\Sigma$. Elles peuvent présenter des points angulaires : ceux-ci apparaissent à un temps t_0 et se propagent aux temps $t > t_0$. Deux phénomènes causent l'apparition de points angulaires au temps t_0 (voir [1] ainsi que l'article de M.P. Muller dans [2]) :

1. L'existence de points de contact pour la courbe $\partial\Sigma(t_0)$, c'est à dire de points P de Σ pour lesquels il existe deux points distincts P_1 et P_2 de $\partial\Sigma$ et deux arcs de géodésiques de même longueur t_0 , orthogonaux à $\partial\Sigma$, et reliant P à P_1 et P_2 . Pour tout $t > t_0$, la courbe $\partial\Sigma(t)$ présente un point angulaire issu du point de contact. La topologie de $\Sigma(t)$ est modifiée au passage de telles valeurs de t .
2. L'existence de points en lesquels la courbure géodésique est infinie, c'est à dire de points singuliers pour la courbe $\partial\Sigma(t_0)$. Si P est un point singulier de $\partial\Sigma(t_0)$, la courbe $\partial\Sigma(t)$ présente un point angulaire issu de P pour tout $t > t_0$.

En un point angulaire d'une parallèle $\partial\Sigma(t)$, l'angle entre les normales entrantes est inférieur à π . En effet, pour un réel $\varepsilon > 0$ assez petit, la courbe $\partial\Sigma(t)$ est l'enveloppe des frontières des boules de rayon ε et de centres les points de $\partial\Sigma(t - \varepsilon)$, et en un point d'intersection entre deux boules, l'angle entre les normales sortantes est inférieur à π .

D'après [1], on peut approximer la courbe $\partial\Sigma$ par une courbe lisse en position générale pour les points doubles des parallèles comme pour les points singuliers. On supposera donc par la suite qu'il n'y a qu'un nombre fini de points angulaires.

Notons $\chi(t)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface $\Sigma(t)$. On constate que la fonction χ est croissante. En effet, il existe deux types de contacts :

1. Un contact entre deux composantes connexes distinctes de $\partial\Sigma(t)$. Alors $\Sigma(t^+)$ a une composante de bord de moins que $\Sigma(t^-)$.
2. Un contact d'une même composante connexe de $\partial\Sigma(t)$ avec elle-même. Alors on obtient la surface $\Sigma(t^+)$ en retirant un disque à deux trous de $\Sigma(t^-)$.

Dans les deux cas, on a bien $\chi(t^+) = \chi(t^-) + 1$.

Par la suite on notera $a(t)$ l'aire de la surface $\Sigma(t)$ et $l(t)$ la longueur de son bord $\partial\Sigma(t)$ (pour la métrique g). La fonction a est dérivable, et on a la relation classique : $a'(t) = -l(t)$. La fonction l est continue (car la courbe $\partial\Sigma$ est en position générique) et dérivable à droite (la notation l' désignera la dérivée à droite de l).

On notera enfin $\chi^- = \min(0, \chi)$.

Les trois propriétés suivantes sont alors vérifiées et permettent de conclure :

1. $a' = -l$.
2. $a - l' \geq 2\pi\chi^-$.
3. $\forall T \geq 0, a(T) + \pi M^2 \chi^- \leq \frac{M^2}{2 \int_0^T \frac{dt}{l(t)}}$.

Commençons par établir le Théorème 2 avant de démontrer les propriétés 2 et 3 :

Supposons que $a(0) \geq 2\pi M^2 \chi^-$. En intégrant la relation $l' \leq a - 2\pi \chi^-$ entre 0 et T et en majorant $a(t)$ par $a(0)$ pour tout $t \geq 0$, on obtient :

$$l(T) \leq l(0) + T(a(0) - 2\pi \chi^-) \leq l(0) + 2Ta(0).$$

D'une part, on en déduit :

$$\frac{1}{\int_0^T \frac{dt}{l(t)}} \leq \frac{2a(0)}{\log(1 + 2T \frac{a(0)}{l(0)})}.$$

D'autre part, en intégrant la relation 1, on obtient l'inégalité suivante, valable même lorsque $a(T) = 0$ et $l(T) = 0$:

$$a(T) \geq a(0) - Tl(0) - T^2 a(0).$$

L'inégalité 3 s'écrit alors, en notant $x = \frac{a(0)}{l(0)}$:

$$x - T - T^2 x + \frac{\pi M^2 \chi^-}{l(0)} \leq \frac{M^2 x}{\log(1 + 2Tx)}.$$

Comme $a(0) \geq -2\pi M^2 \chi^-$, cela s'écrit :

$$x(\frac{1}{2} - T^2) - T \leq \frac{M^2 x}{\log(1 + 2Tx)}.$$

Posons $T = \frac{1}{2}$. Distinguons deux cas : soit le terme de gauche de l'inégalité ci-dessus est négatif ou nul, auquel cas $x \leq 2$, soit il est strictement positif, auquel cas :

$$\log(1 + x) \leq \frac{M^2 x}{x(\frac{1}{2} - T^2) - T} \leq \frac{2M^2 x}{x - 2} = 2M^2 + \frac{4M^2}{x - 2}.$$

Pour $x \geq 4$, cette inégalité devient :

$$x \leq 2e^{8M^2}$$

comme annoncé.

Démonstration de la propriété 2. Elle est une conséquence presque immédiate du théorème de Gauss-Bonnet et suit l'article de M.P. Muller dans [2]. On note α_i les valeurs des éventuels angles intérieurs du bord. Le théorème de Gauss-Bonnet s'écrit alors :

$$\int_{\Sigma(t)} K_g v_g + \int_{\partial \Sigma(t)} k ds_g + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi \chi(t)$$

où K_g est la courbure de la métrique g et k est la courbure géodésique de la courbe $\partial \Sigma(t)$.

Or, un dessin montre que l est dérivable à droite et que : $\int_{\partial \Sigma(t)} k ds_g = -l'(t) - 2 \sum_i \cotan(\frac{\alpha_i}{2})$. Comme $K_g \leq 1$, on a :

$$a(t) - l'(t) \geq 2\pi \chi(t) + 2 \sum_i \left(\cotan \frac{\alpha_i}{2} - \frac{\pi - \alpha_i}{2} \right).$$

Or, d'une part, $0 \leq \alpha_i < \pi$, soit $\sum_i \left(\cotan \frac{\alpha_i}{2} - \frac{\pi - \alpha_i}{2} \right) \geq 0$, et d'autre part $\chi(t) \geq \chi^-$. La propriété est donc démontrée.

Démonstration de la propriété 3. Elle découle de l'existence d'une inégalité isopérimétrique pour la métrique de Poincaré h de courbure -1 et suit celle de B. Kleiner dans [9].

Notons v_g la forme d'aire de la métrique g . Notons $a_h(t)$ et $l_h(t)$ respectivement l'aire de $\Sigma(t)$ et la longueur de $\partial \Sigma(t)$ pour la métrique hyperbolique h . Soit $t > 0$. Comme $a_h(t) = \int_{\Sigma(t)} \Phi^{-2} v_g$, alors $a'_h(t) = - \int_{\partial \Sigma(t)} \Phi^{-2} ds_g$. l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$l_h(t)^2 = \left(\int_{\partial \Sigma(t)} \Phi^{-1} ds_g \right)^2 \leq \left(\int_{\partial \Sigma(t)} \Phi^{-2} ds_g \right) \left(\int_{\partial \Sigma(t)} ds_g \right) = -a'_h(t) l(t)$$

soit encore :

$$\frac{-a'_h(t)}{l_h(t)^2} \geq \frac{1}{l(t)}.$$

On fixe un réel $T \geq 0$. Comme a_h est décroissante, soit $a_h(T) + 2\pi\chi^- \leq 0$, auquel cas l'inégalité est triviale pour T , soit pour tout $0 \leq t \leq T$, $a_h(t) + 2\pi \min \chi^- > 0$. L'inégalité isopérimétrique vérifiée par la métrique de Poincaré s'écrit : $a_h(t) \leq l_h(t) - 2\pi\chi^-$ (voir par exemple [4]). En l'injectant, on obtient :

$$\frac{1}{l(t)} \leq \frac{-a'_h(t)}{l_h(t)^2} \leq \frac{-a'_h(t)}{(a_h(t) + 2\pi\chi^-)^2},$$

ce qui donne par intégration :

$$\int_0^T \frac{dt}{l(t)} \leq \int_0^T \frac{-a'_h(t)}{(a_h(t) + 2\pi\chi^-)^2} dt \leq \frac{1}{a_h(T) + 2\pi\chi^-} - \frac{1}{a_h(0) + 2\pi\chi^-} \leq \frac{1}{a_h(T) + 2\pi\chi^-}.$$

La propriété suit.

Références

- [1] V. I. ARNOLD *Singularities of systems of rays*, Russian Math. Surveys 38 (1983), 87-176.
- [2] M. AUDIN, J. LAFONTAINE, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Mathematics 117. Birkhäuser (1994).
- [3] R. BRODY, *Compact manifolds and hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 213-219.
- [4] YU. D. BURAGO, V.A. ZALGALLER, *Geometric inequalities*, Grundlehren der math. Wissenschaften 285. Springer (1988), Berlin.
- [5] J.P. DEMAILLY, *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials (Lecture notes at Santa Cruz)*, Proceedings of Symposia in Pure Math., vol 62.2, (1997), 285-360.
- [6] H. DE THÉLIN, *Une démonstration du théorème de recouvrement de surfaces d'Ahlfors*, Ens. Math. 51 (2005), 203-209.
- [7] J. DUVAL, *Sur le lemme de Brody*, Invent. Math. 173 (2008), 305-314.
- [8] F. FIALA, *Le problème des isopérimétries sur les surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment. Math. Helv. 13 (1940-41), 293-345.
- [9] B. KLEINER, *Hyperbolicity using minimal surfaces*, preprint.
- [10] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic Complex Spaces*, Grundlehren der math. Wissenschaften 318. Springer (1998), Berlin.
- [11] R. NEVANLINNA, *Analytic functions*, Springer (1970).